SESSION DE 1991

Option M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, E désignera un espace vectoriel euclidien de dimension n (n entier naturel, $n \geqslant 2$), dont le produit scalaire sera noté $< , >$, et la norme associée $\| \ \|$. On notera Id l'application identité de E dans E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on notera F^o l'orthogonal de F, c'est-à-dire le sous-espace de E formé de tous les vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F. Si $E_1, \ldots, E_k$ sont des sous-espaces de E, ils sont dits deux à deux orthogonaux si et seulement si : pour tout (i, j) avec $i \neq j$, et tout couple (x_i, x_j), de $E_i \times E_j$, x_i est orthogonal à x_j.

$\mathscr{L}(E)$ est l'espace des endomorphismes de E; si A est élément de $\mathscr{L}(E)$, on rappelle que l'adjoint d A est l'unique endomorphisme A^* vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ < A(x), y > \ = \ < x, A^*(y) > .$$

Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{L}(E)$, on notera AB la composée de A par B, à la place de l'habituel $A \circ B$, A^2 désignera $A \circ A$, et en notant GL(E) l'ensemble des automorphismes de E, si $A \in GL(E)$, A^{-1} désignera l'inverse de A.

On rappelle au candidat qu'il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la rédaction, ainsi que de la rigueur des raisonnements.

I. Généralités

1. On considère f et g deux endomorphismes de E, et E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. Montrer que si les restrictions de f et g à E_1 et E_2 coïncident, alors $f = g$.

2. On considère A de $\mathscr{L}(E)$; déterminer le noyau et l'image de A^* en fonction de ceux de A. Que dire de $\mathrm{Ker}(A^*A)$?

3. Soit u un projecteur de E, c'est-à-dire un endomorphisme tel que $u^2 = u$.

   a. Montrer que u est diagonalisable, et que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

   b. On pose $v = \mathrm{Id} - u$; montrer que v est un projecteur dont on donnera le noyau et l'image.

   c. On suppose que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont orthogonaux; trouver u^*. Établir une réciproque. u est appelé projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(u)$.

4. Soient $E_1, \ldots, E_k (k \in \mathbb{N}^*)$ des sous-espaces de E deux à deux orthogonaux, et pour $1 \leqslant j \leqslant k$ soit p_j la projection orthogonale sur E_j. Déterminer $p = p_1 + \ldots + p_k$.

Tournez la page S.V.P.

II. Définition de l'inverse généralisé d'un endomorphisme

1. Pour un endomorphisme A de E, on note P la projection orthogonale sur Im (A), et Q celle sur $(\mathrm{Ker}(A))^{\circ}$.
   Soit x de E, calculer $AQ(x)$ et $PA(x)$.

2. On considère l'application A_o de $(\mathrm{Ker}(A))^{\circ}$ dans Im (A) qui coïncide avec A sur $(\mathrm{Ker}(A))^{\circ}$. Montrer que A_o est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. On appelle alors inverse généralisé de A l'endomorphisme de E qui à x de E associe $A_o^{-1} P(x)$, et on note A^* cet endomorphisme.
   Montrer que si A est inversible, alors A^* est égal à A^{-1}.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(A^*)$ et $\mathrm{Im}(A^*)$.

5. *a.* Déterminer à l'aide de P et Q les endomorphismes AA^* et A^*A.
   b. Soit y de E.
   α. Prouver que l'équation $A(x) = y$ a des solutions si et seulement si $AA^*(y) = y$. $(\mathscr{R})$
   β. Prouver que l'ensemble des solutions de $A(x) = 0$ est l'ensemble :
   $$\{ x \in E;\ \exists z \in E,\ x = (\mathrm{Id} - A^*A)(z) \}.$$
   On suppose que $(\mathscr{R})$ est vérifiée; établir que l'ensemble des solutions de $A(x) = y$ est :
   $$\{ x' \in E;\ \exists z \in E,\ x' = A^*(y) + (\mathrm{Id} - A^*A)(z) \}.$$
   γ. Dans le cas général, on pose $t = A^*(y)$; montrer que :
   $$\| A(t) - y \| = \inf_{z \in E} \| A(z) - y \|.$$

6. *a.* Préciser $(A^*)^*$.
   b. Établir que $(A^*)^* = (A^*)^*$.

7. Montrer que $A^* = A^*$ si et seulement si A_o conserve la norme.

8. Soit B un élément de GL (E) tel que B^*B laisse stable Im (A).
   a. Montrer que $B((\mathrm{Im}(A))^{\circ}) = (B(\mathrm{Im}(A)))^{\circ}$.
   b. Montrer alors que $(BA)^* = A^*B^{-1}$.

9. Soit B de GL (E) tel que BB^* laisse stable Ker (A).
   a. Montrer que $B^{-1}((\mathrm{Ker}(A))^{\circ}) = (B^{-1}(\mathrm{Ker}(A)))^{\circ}$.
   b. Établir que $(AB)^* = B^{-1}A^*$.

10. *Exemple :* Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (i, j, k)$, on donne A et B par leurs matrices respectives :
$$M(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Déterminer par leurs matrices dans $\mathscr{B}$ les endomorphismes $(BA)^*$, $(AB)^*$, A^*B^* et B^*A^*.

A SUIVRE

III. Caractérisation de $A^\blacklozenge$

1. Vérifier que $A^\blacklozenge$ est solution du système $(\mathscr{S})$ d'inconnue M, élément de $\mathscr{L}(E)$, suivant :

$$\begin{cases} (1)\ AMA = A \\ (2)\ MAM = M \\ (3)\ AM = M^*A^* \\ (4)\ MA = A^*M^* \end{cases}$$

2. Montrer que M vérifie (2) et (3) si et seulement si :

$$(5)\ MM^*A^* = M.$$

Prouver de même que M vérifie (1) et (4) si et seulement si :

$$(6)\ MAA^* = A^*.$$

3. Prouver que $(\mathscr{S})$ est équivalent à :

$$\begin{cases} (7)\ A^*M^*M = M \\ (8)\ A^*AM = A^*. \end{cases}$$

4. On suppose que M vérifie (5) et (6) et que N vérifie (7) et (8). En calculant MAN de deux façons différentes, prouver que $M = N$.

5. Résoudre $(\mathscr{S})$.

6. Vérifier que $(A^*A)^\blacklozenge = A^\blacklozenge(A^\blacklozenge)^*$.

7. *a.* Prouver que les valeurs propres de A^*A sont dans $\mathbb{R}_+$.

Pour λ valeur propre non nulle de A^*A, on note P_λ le projecteur orthogonal sur E_λ, sous-espace propre associé à λ, et A_λ l'endomorphisme défini par :

$$A_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} AP_\lambda.$$

On notera Λ l'ensemble des valeurs propres non nulles de A^*A.

b. Prouver les relations suivantes :

(α) $A^*A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda$.

(β) $A^\blacklozenge A = \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$.

(γ) $(A^*A)^\blacklozenge = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda} P_\lambda$.

(δ) $A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sqrt{\lambda}\, A_\lambda$.

(ε) $(A_\lambda)^\blacklozenge = (A_\lambda)^*$. En déduire $(A_\lambda)^*A_\lambda$.

(ζ) $(A_\lambda)^*A_\mu = A_\lambda (A_\mu)^* = 0$ dès que $\lambda \neq \mu$.

c. Calculer $A^\blacklozenge$ en fonction des A_λ.

FIN